Regeln der Differenzialrechnung

Konstantenregel

Eine konstante Funktion f mit f(x)=c hat als Ableitung für alle x die Funktion f'(x)=0. *Die Ableitung von konstanten Funktionen ist null.*

Potenzregel

Eine Funktion f mit $f(x) = x^n$ sei differenzierbar und hat als Ableitung $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

Faktorregel

Sei g eine differenzierbare Funktion. So ist auch f mit $f(x) = c \cdot g(x)$ differenzierbar. Für die Ableitung gilt dann: $f'(x) = c \cdot g'(x)$. *Ein konstanter Faktor bleibt beim Ableiten erhalten.*

Summenregel

Seien u und v in x_0 differenzierbar, so ist auch f mit $f(x_0) = u(x_0) + v(x_0)$ in x_0 differenzierbar. Die Funktion f hat dann als Ableitung: $f'(x_0) = u'(x_0) + v'(x_0)$. *Eine aus Summanden bestehende Funktion wird summandenweise differenziert. für u(x)-v(x) kann man auch u(x)+(-v(x)) schreiben und dann wie gewohnt ableiten. Für -v(x) gilt bei der Ableitung, dass der konstante Faktor -1 erhalten bleibt.*

Produktregel

Seien u und v in x_0 differenzierbar, so ist auch f mit $f(x_0) = u(x_0) \cdot v(x_0)$ in x_0 differenzierbar. Die Funktion f hat dann als Ableitung: $f'(x_0) = u'(x_0) \cdot v(x_0) + u(x_0) \cdot v'(x_0)$.

Kettenregel

Sei v in x_0 und u in $v(x_0)$ differenzierbar, so ist auch f mit $f(x_0) = u - v = u(v(x_0))$ in x_0 differenzierbar. Die Funktion f hat dann als Ableitung: $f'(x_0) = v'(x_0) \cdot u'(v(x_0))$. *Eine verkettete Funktion wird abgeleitet, indem man die innere Ableitung mit der äußeren Ableitung multipliziert.*

Reziprokregel

Sei g in x_0 differenzierbar, so ist auch f mit $f(x_0) = \frac{1}{g(x_0)}$ in x_0 differenzierbar. Für die Ableitung von f gilt dann $f'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

Quotientenregel

Seien u und v in x_0 differenzierbar, so ist auch f mit $f(x_0) = \frac{u(x_0)}{v(x_0)}$ in x_0 differenzierbar. Für die Ableitung von f gilt dann $f'(x_0) = \frac{u'(x_0) \cdot v(x_0) - u(x_0) \cdot v'(x_0)}{v^2(x_0)}$.

Trigonometrische Funktionen

Sei f(x)=sin(x), so ist die Ableitung von f $f'(x) = \cos(x)$.

Sei f(x)=cos(x), so ist die Ableitung von f $f'(x) = -\sin(x)$.

© 2002 – 2006 by Kevin Kaatz

Sei $f(x) = \tan(x)$, so ist die Ableitung von f $f'(x) = \frac{\cos(x)\cdot\cos(x) - \sin(x)\cdot(-\sin(x))}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)}$.

Man kann auch schreiben: $f'(x) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$.

Exponential- und Logarithmusfunktionen

Sei $f(x) = \log_a x$, dann gilt für die Ableitung $f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$.

Sei $f(x) = a^x$, dann gilt $f'(x) = a^x \cdot \ln a$

Sei $f(x) = \log_e x = \ln x$, dann gilt für die Ableitung $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Die e-Funktion

Sei $f(x) = e^x$, so gilt für die Ableitung $f'(x) = e^x$.

Kurvendiskussionen

Eine Funktion f hat an einer Stelle x_0 ein Maximum, wenn gilt:

- $f'(x_0)=0$ (Notwendige Bedingung)
- $f''(x_0)<0$ (hinreichende Bedingung); für $f''(x_0)=0$:
- Es findet ein Vorzeichenwechsel bei $f'(x_0)$ statt, und zwar von positiv nach negativ

Eine Funktion f hat an einer Stelle x_0 ein Minimum, wenn gilt:

- $f'(x_0)=0$ (Notwendige Bedingung)
- $f''(x_0)>0$ (hinreichende Bedingung); für $f''(x_0)=0$:
- Es findet ein Vorzeichenwechsel bei $f'(x_0)$ statt, und zwar von negativ nach positiv

Eine Funktion f hat an einer Stelle x_0 einen Wendepunkt von links nach rechts, wenn gilt:

- $f''(x_0)=0$ (Notwendige Bedingung)
- $f'''(x_0)<0$ (hinreichende Bedingung); für $f'''(x_0)=0$:
- Es findet ein Vorzeichenwechsel bei $f''(x_0)$ statt, und zwar von positiv nach negativ

Eine Funktion f hat an einer Stelle x_0 einen Wendepunkt von rechts nach links, wenn gilt:

- $f''(x_0)=0$ (Notwendige Bedingung)
- $f'''(x_0)>0$ (hinreichende Bedingung); für $f'''(x_0)=0$:
- Es findet ein Vorzeichenwechsel bei $f''(x_0)$ statt, und zwar von negativ nach positiv

© 2002 – 2006 by Kevin Kaatz

Anwendungsbeispiele:

Konstantenregel

$$f(x) = 27 \Rightarrow f'(x) = 0$$

Potenzregel

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

Faktorregel

$$f(x) = 12 \cdot x^2 \Rightarrow f'(x) = 12 \cdot 2 \cdot x = 24 \cdot x$$

Summenregel

$$f(x) = 2x^2 - 5x + 23 \Rightarrow f'(x) = 4x - 5$$

Produktregel

$$f(x) = x^2 \cdot (2x^2 + 3x) \Rightarrow f'(x) = 2x \cdot (2x^2 + 3x) + x^2 \cdot (4x + 3) = 2x^4 + 6x^2 + 4x^3 + 3x^2 = 2x^4 + 4x^3 + 9x^2$$

Kettenregel

$$f(x) = (x+1)^2 \Rightarrow f'(x) = 1 \cdot 2 \cdot (x+1) = 2x + 2$$

Reziprokregel

$$f(x) = \frac{1}{x+1} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$$

Quotientenregel

$$f(x) = \frac{x}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

Trigonometrische Funktionen

$$f(x) = -\sin(x) - \cos(x) + \tan(x) \Rightarrow f'(x) = -\cos(x) + \sin(x) + 1 + \tan^2(x)$$

Exponential- und Logarithmusfunktionen

$$f(x) = \log_2 x + 2^x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln 2} + 2^x \cdot \ln 2$$

Die e-Funktion

$$f(x) = e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

© 2002 – 2006 by Kevin Kaatz